Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero - Marzo, 2008

Carnet: ______________________

Nombre: ______________________

Sección: ______________________

MA-1112 —Tercer Parcial, Martes 8-04-2008. (40 %) —

Justifique todas sus respuestas. Examen Tipo A

1. (10 ptos.)

a) (5 ptos.) Halle la integral

$$\int x \operatorname{arc\,sen}(x^2)dx$$

Solucion: Sea $I = \int x \operatorname{arc\,sen}(x^2)dx$. Utilizando el metodo de Integración por partes y tomando $u = \operatorname{arc\,sen}(x^2)$ y $dv = xdx$. Tenemos que $du = \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$ y $v = \frac{x^2}{2}$.
Asi, $I = \frac{x^2}{2} \operatorname{arc\,sen}(x^2) - \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx$.
Por otro lado, sea $I_1 = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx$ y $w = 1 - x^4$, $dw = -4x^3dx$; entonces

$$I_1 = -\frac{1}{4}\int \frac{dw}{\sqrt{w}} = -\frac{1}{2}\sqrt{w} + K = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + K.$$

Luego,

$$I = \frac{x^2}{2} \operatorname{arc\,sen}(x^2) - I_1 = \frac{x^2}{2} \operatorname{arc\,sen}(x^2) + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + K.$$

b) (5 ptos.) Demuestre que

$$\int x^m e^x dx = x^m e^x - m\int x^{m-1}e^x dx.$$

Solucion: Utilizando el metodo de Integración por partes, se tiene que si consideramos como $u = x^m$ y $dv = e^x dx$, implica que $dv = mx^{m-1}dx$ y $v = e^x$. Entonces, $\int x^m e^x dx = x^m e^x - m\int x^{m-1}e^x dx$.

2. (10 ptos.) Halle la siguiente integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$$

Solucion: Dado que $x^2 + 4x + 13 = x^2 + 4x + 4 + 9 = (x+2)^2 + 3^2$,

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+13}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+3^2}}.$$

Realizando un cambio de variable, $u = x + 2\ du = dx$, tenemos que

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 + 3^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+3^2}}.$$

Realizando un segundo cambio de variable, $u = 3\tan(z)$ con $\frac{-\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}$, $du = 3\sec^2(z)dz$ (Notese que, $\sqrt{u^2+3^2} = \sqrt{9\tan^2(z)+9} = 3\sqrt{\tan^2(z)+1} = 3\sqrt{\sec^2(z)} = 3\sec(z)$). Tenemos que,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3\sec^2(z)dz}{3\sec(z)} = \int \sec(z)dz = \ln \mid \sec(z) + \tan(z) \mid + C \\ &= \ln \mid \frac{\sqrt{u^2+9}}{3} + \frac{u}{3} \mid + C \\ &= \ln \mid \frac{\sqrt{x^2+4x+13}}{3} + \frac{x+2}{3} \mid + C \end{aligned}$$

3. (10 ptos.) Halle la integral indefinida

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 - 6x + 8}{(x+3)(x^2+2)} dx$$

Solucion: Como el grado del polinomio del numerador es igual al polinomio del denominador dividimos los polinomios y obtenemos

$$\frac{x^3 - 6x^2 - 6x + 8}{(x+3)(x^2+2)} = \frac{-9x^2 - 8x + 2}{(x+3)(x^2+2)} + 1.$$

Asi,

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 - 6x + 8}{(x+3)(x^2+2)} dx = \int \frac{-9x^2 - 8x + 2}{(x+3)(x^2+2)} dx + \int dx = x + \int \frac{-9x^2 - 8x + 2}{(x+3)(x^2+2)} dx$$

La integral del lado derecho de la igualdad la resolveremos por fracciones simples. Escribimos las fracciones simples asociadas

$$\frac{-9x^2 - 8x + 2}{(x+3)(x^2+2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx + C}{x^2+2}$$

Buscamos los valores de A, B y C

$$\frac{-9x^2 - 8x + 2}{(x+3)(x^2+2)} = \frac{A(x^2+2)}{x+3} + \frac{(Bx+C)(x+3)}{x^2+2}$$

de donde

$$-9x^2 - 8x + 2 = A(x^2+2) + (Bx+C)(x+3)$$

y se obtiene

$$A = -5 \qquad B = -4 \text{ y } C = 4.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int \tfrac{-9x^2-8x+2}{(x+3)(x^2+2)}dx &= \int \tfrac{-5}{x+3}dx + \int \tfrac{-4x+4}{x^2+2} = -5\int \tfrac{dx}{x+3} - 2\int \tfrac{2xdx}{x^2+2} + 2\int \tfrac{dx}{(x/\sqrt{2})^2+1} \\ &= -5\ln \mid x+3 \mid -2\ln(x^2+2) + 2\sqrt{2}\arctan(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x) + C. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int \frac{x^3-6x^2-6x+8}{(x+3)(x^2+2)}dx = x - 5\ln \mid x+3 \mid -2\ln(x^2+2) + 2\sqrt{2}\arctan(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + C.$$

4. (10 ptos.)

a) (5 ptos.) Estudie la convergencia o divergencia de la siguiente integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4(1+t^4)}.$$

Solucion: Es conocido que $t^4+1 \geq t^4$, asi, $t^4(t^4+1) \geq t^8$ de aqui $\frac{1}{t^4+1} \leq \frac{1}{t^8}$. Luego estudiaremos la convergencia de la integral de $f(t) = \frac{1}{t^8}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^8} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dt}{t^8} = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{-1}{7x^7}\right)_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{7b^7} - \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7}.$$

Por lo tanto, la integral es convergente y por el criterio de comparación concluimos que la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4(1+t^4)}.$$

es convergente.

b) (5 ptos.) Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0^+} (2x+1)^{\cot(x)} . \text{ (indeterminación del tipo } 1^\infty)$$

Solucion: Sea $y = (2x+1)^{\cot(x)}$, entonces $\ln(y) = \cot(x)\ln(2x+1)$. Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \ln(y) &= \lim_{x\to 0^+} \cot(x)\ln(2x+1) \text{ (indeterminacion } 0\times\infty) \\ &= \lim_{x\to 0^+} \tfrac{\ln(2x+1)}{\tan(x)} \text{ (indeterminacion } \tfrac{0}{0}) \\ &= \lim_{x\to 0^+} \tfrac{\frac{2}{2x+1}}{\sec^2(x)} = \tfrac{2}{1} = 2. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to 0^+} (2x+1)^{\cot(x)} = e^2.$$